Колмогоровские поперечники классов Соболева и ℓ_p^N-шаров: исторический обзор

15 октября 2015 г.

Цель данного обзора — проследить основные идеи и методы, использовавшиеся при вычислении поперечников по Колмогорову. Наиболее интересными для нас будут следующие объекты.

- Поперечники конечномерных ℓ_p-шаров в ℓ_q-норме: $d_n(B_p^N, \ell_q^N)$, при $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $1 \leqslant n < N$.
- Поперечники классов Соболева[(1)] $d_n(W_p^r, L_q[-1,1])$, а также периодических классов $d_n(\widetilde{W_p^r}, L_q[-\pi,\pi])$, при $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

Всюду $\|f\|_{L_p[a,b]} = (\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^p\,dx)^{1/p}$.

Там, где важна лишь асимптотика или порядок поперечника при $n \to \infty$ и фиксированном r, между W_p^r и $\widetilde{W_p^r}$ нет разницы, поскольку $\widetilde{W_p^r} \subset W_p^r[-\pi,\pi] \subset (x\mathcal{P}_{r-1}) + 2\widetilde{W_p^r}$, откуда

$$d_n(\widetilde{W_p^r}, L_q) \leqslant d_n(W_p^r[-\pi,\pi], L_q[-\pi,\pi]) = \pi^r d_n(W_p^r[-1,1], L_q[-1,1]) \leqslant d_{n+r}(\widetilde{W_p^r}, L_q).$$

Базовые факты и обозначения: $a_+ = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ 0, & a = 0 \end{cases}$; $\|x\|_{\ell_p^N} \leqslant N^{(1/p-1/q)_+}\|x\|_{\ell_q^N}$.

Помимо *точных* значений поперечников (их удается вычислить далеко не всегда!), нас будут интересовать их *порядки* (в основном) и *асимптотики* (реже).

1. Уклонение от триг. полиномов:

$$E(\widetilde{W_p^r}, \mathcal{T}_{n-1}, L_q) \asymp n^{-r+(1/p-1/q)_+}.$$

(1) Уточним, что $W_p^r = \{f \colon \|f^{(r)}\|_p \leqslant 1\}$.

Оценка сверху. Пусть $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. Сводится к $p = q$; в этом случае метод Фавара даёт погрешность, равную $E_{n-1}(\mathcal{K}_r)_1 = \frac{K_r}{n^r}$. Метод Фурье при $p \in (1, \infty)$ тоже оптимален по порядку. Пусть $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. Погрешность метода Фурье (н-во Юнга):

$$\|f - S_{n-1}(f)\|_q = \|(\sum_{|k|\geqslant n} e^{ikx}/(ik)^r) * f^{(r)}\|_q \leqslant \| \sum_{|k|\geqslant n} e^{ikx}/(ik)^r\|_s \cdot \|f^{(r)}\|_p.$$

Норма суммы оценивается с помощью преобразования Абеля и оценки L_s-норм ядер Дирихле (в случае нечетного r — сопряженных ядер Дирихле или, общий подход, функции $\sum_{k=0}^n e^{ikx}$). Крайние случаи сюда также включаются, поскольку $s > 1$ (если следовать [8, §3.2], то их нужно рассматривать отдельно, т.к. применяется теорема Рисса в L_p).

Оценка снизу. Пусть $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. Сводится к $q = 1$, $p = \infty$, берем эйлеров сплайн $\varphi_{n,r}$; он не приближается $\mathcal{T}_{n-1}$. Пусть $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$. В случае $1 < p < q < \infty$ метод Фурье оптимален по порядку (т.к. $\|S_{n-1}\|_{q\to q} \leqslant C(q)$), достаточно оценить $\max_{f\in W^r_p} \|f - S_{n-1}f\|_q$: берем $f = D_{An} - D_n$. Крайние случаи: $q = \infty$ проходит аналогично (пользуемся тем, что метод Валле-Пуссена оптимален); для $p = 1$ можно взять $f^{(r)} = e^{Ainx} K_n$, где K_n — ядро Фейера.

2. Эллипсоид[(2)] в евклидовом пространстве: $d_n(B^N_2(a), \ell^N_2) = a_{n+1}$.

Пример, вместе с определением поперечника, был приведён в статье Колмогорова 1936 года. Оценка сверху очевидна. Оценка снизу: вписывается $n+1$-мерный шар, проецируется на соотв. подпространство. Частные случаи: точные значения для поперечников классов Соболева $\widetilde{W}^r_2$ и W^r_2 (сложнее — нужно брать собственные функции оператора $(-1)^r \frac{d^r}{dx^r}$ с краевыми условиями $x^{(j)}(\pm 1) = 0$, $r \leqslant j \leqslant 2r - 1$; при $r = 2$ полуоси получаются из уравнения $|\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}| = \tanh\sqrt{\lambda})$ в L^2.

Задачи. Описание всех экстремальных подпространств. Обобщение: неединственность экстремального пространства для случайного выпуклого тела.

3. Октаэдр в евклидовом пространстве: $d_n(B^N_1, \ell^N_2) = \sqrt{(N - n)/N}$.

Упоминание есть в работе Стечкина 1954 года (см. также Rudin, 1952). Оценка снизу: сумма квадратов расстояний от базисных векторов $e_1, \ldots, e_N$ до L_n есть $N - n$, откуда всё следует. Оценка сверху: построе-

[(2)] $B^N_2(a) = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N (x_i/a_i)^2 \leqslant 1\}$.

ние нужной ортогональной матрицы[3], либо индукцией по размерности, либо “подкруткой” (см. Тихомиров, 19??).

В качестве следствия получаются *порядки* поперечников классов W^r_∞, $\widetilde{W^r_\infty}$ в L_q, $q \geqslant 2$: $d_n \asymp n^{-r}$. Оценка сверху: триг. полиномы. Оценка снизу (в L_2): вписываем $2n$-мерный октаэдр, т.е. $2n$ орто-векторов (тригонометрия). Также получаются порядки W^r_1, $\widetilde{W^r_1}$ в L_2 (только $q = 2!$): $d_n \asymp n^{-r+1/2}$. Оценка сверху: триг. полиномы. Оценка снизу: вписываем октаэдр из функций с носителями $[k/(2n), (k+1)/(2n)]$.

4. Сдвиги функции в L^2.

Работа Исмагилова 1968 года [9]. Далеко идущее обобщение рассуждения про $d_n(B^N_1, \ell^N_2)$, позволяющее выписать d_n для множества сдвигов функции в L^2. Пусть $\varphi\colon K \to H$, где K — компакт с вероятностной мерой μ, H — гильбертово пространство. Используется оценка $d^2_n(\varphi(K), H) \geqslant \int_K E^2(\varphi(x), L_n)\, d\mu(x)$. Справедлив бесконечномерный аналог PCA: существует базис $\{e_k\}^\infty_{k=1} \subset H$, в котором координаты $g_k(x) = \langle\varphi(x), e_k\rangle_H$ образуют ортогональную систему $\{g_k\} \subset L^2(K, \mu)$. В этом базисе удобно оценивать интеграл из оценки снизу; он минимален для $\hat{L}_n = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_n)$, где порядок e_j таков, что последовательность $\lambda_j = \|g_j\|^2_{L^2(K,\mu)}$ убывает; это же пространство даёт оценку сверху; в итоге,

$$\sum_{j>n} \lambda_j \leqslant \int_K E^2(\varphi(x), L_n)\, d\mu(x) \leqslant d^2_n(\varphi(K), H) \leqslant \max_{x\in K} \sum_{j>n} g_j(x)^2.$$

Если $|g_j(x)| \equiv \mathrm{const}$ при всех $j > n$, как в случае сдвигов, то пространство $\hat{L}_n$ оптимально и в смысле колмогоровского поперечника $d_n(\varphi(K), H)$. TODO формула для сдвигов (в вещественном и комплексном случаях)!!! Отметим, что нижняя оценка точна для октаэдра и произведения октаэдров.

Отсюда получаются точные значения

$$d_{2n-1}(\widetilde{W^r_1}, L_2) = d_{2n}(\widetilde{W^r_1}, L_2) = \frac{?}{\pi}(\sum_{k\geqslant n} k^{-2r})^{1/2}.$$

Оценка сверху: триг. полиномы. Оценка снизу: сдвиги ядра Бернулли $\sum_{k\neq 0} k^{-r} e^{ikx}$. TODO: не сходится двойка, разобрать вещественный случай и записать его (или дать ссылку).

[3] Подойдут матрицы Адамара (ортогональные матрицы с элементами ±1, но они могут существовать только при $N = 1, 2$ и $N = 4k$; гипотеза Адамара в том, что во всех этих размерностях матрицы существуют.

Также, получаются порядки поперечников классов Соболева для $1 \leqslant p \leqslant 2$ в метрике L_2: $d_n \asymp n^{-r-1/p+1/2}$. Оценка сверху: триг. полиномы. Оценка снизу: сдвиги $\sum_{k=1}^{2n} e^{ikx}/(ik)^r$.

Усиление (1974) для $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant 2$: сверху как обычно. Снизу: пользуемся 1) неравенством Никольского о связи L_q и L_{q_1} норм 2) существованием проектора Фурье $L_q \to (\mathcal{T}_n, L_q)$ ограниченной нормы (в случае $q = 1$ ссылается на Соломяка–Тихомирова):

$$d_n(\tilde{W}_p^r, L_q) \geqslant d_n(\tilde{W}_p^r \cap \mathcal{T}_{2n}, L_q) \gg d_n(\tilde{W}_p^r \cap \mathcal{T}_{2n}, (\mathcal{T}_n, L_q)) \gg$$

$$\gg n^{1/2-1/q} d_n(\tilde{W}_p^r \cap \mathcal{T}_{2n}, (\mathcal{T}_n, L_2)),$$

а эта величина уже оценивалась.

5. Элементарные оценки

- Двойственность:

$$d_n(B_p^N, \ell_q^N) = d^n(B_{q'}^N, \ell_{p'}^N), \quad p^{-1} + p'^{-1} = q^{-1} + q'^{-1} = 1.$$

- Сравнение норм: для любых $1 \leqslant p, q_1, q_2 \leqslant \infty$ имеем

$$d_n(B_p^N, \ell_{q_1}^N) \leqslant N^{(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2})_+} d_n(B_p^N, \ell_{q_2}^N),$$

$$d_n(B_{p_1}^N, \ell_q^N) \leqslant N^{(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1})_+} d_n(B_{p_2}^N, \ell_q^N).$$

  Неравенства не оптимальны, следующие неравенства лучше.

- Интерполяция между ℓ_p^N и ℓ_q^N: пусть $\theta \in (0, 1)$, $s^{-1} = (1-\theta)p^{-1} + \theta q^{-1}$, тогда

$$d_n(B_s^N, \ell_q^N) \leqslant d_n(B_p^N, \ell_q^N)^{1-\theta},$$

$$d_n(B_p^N, \ell_s^N) \geqslant d_n(B_p^N, \ell_q^N)^{\theta}.$$

  Для доказательства переходим к поперечнику по Гельфанду. Он равен норме тождественного оператора на экстремальном подпространстве. Интерполируем оператор между (q', q') и (p', q').

- Кратная размерность:

$$d_{kn}(B_p^{kN}, \ell_q^{kN}) \leqslant d_n(B_p^N, \ell_q^N), \quad p \leqslant q.$$

- Размерность $N-1$:

$$d_{N-1}(B_p^N,\ell_q^N)=N^{1/q-1/p}.$$

6. Теорема Тихомирова о поперечнике шара: $d_n(B_X\cap L_{n+1},X)\geqslant 1$.

Работа Тихомирова 1960 года. Основная идея: использование теоремы Борсука-Улама. Теорема Тихомирова позволила состыковать классические оценки сверху (Фавар, Ахиезер, Крейн) с оценками снизу и найти *точное* значение поперечников $d_{2n-1}(\widetilde{W}_\infty^r,C)$ (периодический случай, n нечетно; для четного n — его же работа 69-го года, сложнее).

7. Случай "верхнего треугольника": $p\geqslant q$.

Порядок n^{-r} был понятен (Лоренц 1960 по Lorentz-Golitschek-Makovoz). Сверху: $(p,q)\to(p,p)$, триг. полиномы. Снизу: $(p,q)\to(\infty,1)$, дальше, например, в духе Вапника–Червоненкиса: $N=Cn$, берем на $(k/N,(k+1)/N)$ функции $\pm N^{-r}\varphi(Nx-k)$, где φ — шапочка на $[0,1]$ с $|\varphi^{(r)}(x)|\leqslant 1$; пространство размерности n разойдется по знакам с некоторым набором знаков на n точках (TODO — найти, где это записано). Другой вариант — теорема о поперечнике шара.

Точные значения искали: Тихомиров, Бабаджанов, Маковоз. Итог — Тихомиров-Буслаев (1990) — выразили поперечники через значения некоторой изопериметрической задачи.

Точные значения $d_n(B_p^N,\ell_q^N)$ при $p\geqslant q$. Стесин (1974 или 1975??), независимо Пич (1974). Оценка сверху — проекция на первые n координат. Оценка снизу (по книге Пинкуса): переходим к d^n по двойственности (!). Берем $x\in L^n$, $\|x\|_\infty=1$, у которого не менее $N-n$ координат по модулю равны 1, пользуемся неравенством

$$\frac{(\sum_{k=1}^M a_k^q)^{1/q}}{(\sum_{k=1}^M a_k^p)^{1/p}}\geqslant\frac{(\sum_{k=1}^{M-1} a_k^q)^{1/q}}{(\sum_{k=1}^{M-1} a_k^p)^{1/p}},$$

для неубывающей перестановки $a_1\geqslant a_2\geqslant\dots$ чисел $|x_k|$.

Замечание: можно найти точные значения поперечников для обобщенных эллипсоидов $B_p^N(r)=\{rx\colon x\in B_p^N\}$, где $rx=(r_1x_1,\dots,r_Nx_N)$.

8. Неожиданный эффект неоптимальности триг. полиномов.

В работе Исмагилова'74 были впервые получены оценки поперечников сверху, лучше, чем приближение триг. полиномами:

$$d_n(\widetilde{W}_2^1,L_\infty)\ll n^{-3/5}\ln n,\quad d_n(\widetilde{W}_1^2,L_\infty)\ll n^{-6/5}\ln n.$$

Оценка через триг. поперечники, т.е. наилучшее приближение пространством вида

$$\operatorname{span}\{\exp(in_1x),\ldots,\exp(in_2x)\}.$$

Схема (для $\widetilde{W}_1^2$): приближаем в два этапа. Первый: приближаем $f \in \widetilde{W}_1^2$ в метрике L_1 полиномом $t \in \mathcal{T}_n$ с погрешностью $O(n^{-2})$. Второй: приближаем разность $f-t$ на подходящей равномерной сетке $\{x_j\}$ из $P \asymp n^{6/5}$ точек, P простое, полиномом s со спектром в $\{g_j\}_{j=1-n^{n-1}} \subset \{(1-P)/2,\ldots,(P-1)/2\}$, где $g_j = g^j$, g — первообразный корень по модулю P; при этом

$$\|f-t-s\|_{\ell_\infty(x_j)} \leqslant P^{3/2}n^{-1}\|f-t\|_{\ell_1(x_j)}.$$

Отсюда и из оценки $E(f,\mathcal{T}_n)_\infty$ выводится оценка на $\|f-t-s\|_\infty$.

9. Октаэдр в ℓ_∞^N.

Первые оценки сверху — в работе Исмагилова 1974 года: B_1^N приближаем $L_n = \{\sum_{k=1}^n e^{ig_kx}\}|_{(2\pi s/N)_{s=1}^N}$, где $N=p$ простое, $g_k = g^k \mod p$; при оценках используются суммы Гаусса; получаем $d_n \ll \sqrt{N}/n$.

Кашин связал аппроксимацию октаэдра с задачей о равномерном распределении на сфере. Пусть

$$\mu(n,N) = \min_{\substack{W\subset S^{n-1}\\ |W|=N}} \max_{\substack{x,y\in W\\ x\neq y}} |\langle x,y\rangle|.$$

Тогда имеем неравенство

$$d_n(B_1^N,\ell_\infty^N) \leqslant \frac{\mu(n,N)}{1+\mu(n,N)}. \qquad (1)$$

Действительно, матрица Грама M экстремального набора W имеет ранг n, при этом $M_{i,i}=1$ и $|M_{i,j}| \leqslant \mu$ при $i\neq j$. Нормируем её столбцы на $\mu/(1+\mu)$ и получим нужное подпространство размерности n. Все оценки сверху на поперечник проводились через μ.

Случайные вектора (напр., с Хефдингом) дают $d_n \leqslant 2\sqrt{\ln N/n}$, см. [1].

В 1975 году Кашин убрал логарифм при $N^\gamma < n < N$, взяв вектора $\{e_\alpha\}$, $e_{\alpha,j} = \left(\frac{R_\alpha(j)}{p}\right)$, $R(x) = (x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_k)$, $\left(\frac{q}{p}\right)$ — символ Лежандра. Почти-ортогональность вытекает из оценки Вейля $\left|\sum_{j=1}^p \left(\frac{Q(j)}{p}\right)\right| \leqslant \deg(Q)\sqrt{p}$ для $Q = R_{\alpha_1}R_{\alpha_2}$. Полученная оценка $d_n \asymp n^{-1/2}$ оптимальна при $N^\gamma < n < N(1-\varepsilon)$.

Хеллиг [25] получает оценку $d_n \ll n^{-1/2}\frac{\ln N}{\ln n}$. Простое доказательство привёл DeVore [24]: возьмём простое p, пусть $n = p^2$, $N = p^{r+1}$, построим W. Каждому полиному Q над $\mathbb{F}_p$ степени не выше r сопоставим бинарный вектор $e_Q \in \mathbb{R}^N$ в виде отображения $e_q\colon \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p \to \{0,1\}$ по правилу $e_Q(x,y) = 1$, если $y = Q(x)$, и $e_Q(x,y) = 0$ иначе. DeVore показывает, что $|\langle e_Q, e_S\rangle| \leqslant 4r$, что соответствует требуемой оценке на μ.

Глускин [13] задаёт вопрос о том, является ли (1) на самом деле равенством, или, хотя бы, порядковым равенством. Он получает оценку снизу

$$d_n \gg \left(\frac{\ln N}{n \ln \frac{2n}{\ln N}}\right)^{1/2}.$$

Идея доказательства: возводим матрицу ранга n (из векторов подпространства, приближающих базисные) в степень k поэлементно, ранг не превысит $M = \binom{n+k-1}{k}$ и полученная матрица даст оценку поперечника $d_M(B_1^N, \ell_\infty^N)$; далее нужно подобрать k и оценить $d_M(B_1^N, \ell_\infty^N)$ снизу через поперечник октаэдра в ℓ_2^N.

Глускин высказал предположение, что данная оценка точна. Та же оценка для $\mu(n,N)$ была у Левенштейна [20] с крайне сложным доказательством(?). Результат Глускина тем же способом передоказал Алон [21].

Также известны точные значения: $d_2(B_1^4, \ell_\infty^4) = \sqrt{2} - 1$, $d_2(B_1^6, \ell_\infty^6) = 2\sqrt{3} - 3$, $d_3(B_1^5, \ell_\infty^5) = d_3(B_1^6, \ell_\infty^6) = (\sqrt{5} - 1)/4$, $d_2(B_1^N, \ell_\infty^N) = \frac{\cos(\pi/N)}{1+\cos(\pi/N)}$, см. [18], $d_{3b-2}(B_1^{3b}, \ell_\infty^{3b}) = \frac{1}{2b}$, см. [19], в той же работе показано, что $d_{N-k}(B_1^N, \ell_\infty^N) = c_k N^{-1}(1 + o(1))$ при $N \to \infty$ и фиксированном k.

В области $n \asymp \log^C N$ оценки на μ сверху улучшались рядом авторов, см. [22] и ссылки в [23].

10. Октаэдр в ℓ_q, $q > 2$.

В работе [4] получены оценки:

$$\frac{1}{4}\min(1, N^{1/q} n^{-1/2}) \leqslant d_n(B_1^N, \ell_q^N) \leqslant C_q \min(1, N^{1/q} n^{-1/2}).$$

Оценка сверху: через $d_n(B_1^N, \ell_\infty^N)$, $n > N^{2/q}$.

Оценка снизу: вместо максимума $E(B_1^N, L) = \max_{i=1}^N E(e_i, L)$ берем сумму $s(\ell_q^N) = \sum_{i=1}^N E(e_i, L)^q$, оцениваем её через $\mathsf{E}s(\ell_q(\Omega))$, где Ω — случайное подмножество $\{1, \ldots, N\}$ мощности $2n$. Далее оцениваем через $s(\ell_2^{2n}) \geqslant n$ (см. оценку поперечника октаэдра в ℓ_2^N).

11. Дискретизация. Подход Исмагилова (1974) при оценке $d_n(W^r_p, L_q)$, $p < q \leqslant 2$, обобщил Майоров (1975):

$$d_n(W^r_p, L_q) \gg n^{-r+1/p-1/q} d_n(B^{2n}_p, \ell^{2n}_q).$$

Можно обосновать теоремой Марцинкевича об эквивалентности сеточной ℓ_q нормы на $2N+1$ точках и обычной L_q-нормы для $\mathcal{T}_N$ (??).

Оценку сверху выписал Майоров (1975): пусть $p \leqslant q$, $\sum n_k \leqslant n$, $N_k = r2^k$, тогда

$$d_n(W^r_p, L_q) \ll \sum_k 2^{(-r+1/p-1/q)k} d_{n_k}(B^{N_k}_p, \ell^{N_k}_q).$$

Функцию $f \in W^r_p$ представляем в виде $\sum_k q_k$, $q_k = P_k f - P_{k-1} f$, где P_k — проектор на пространство функций, на каждом из отрезков $[i/2^k, (i+1)/2^k]$ равных полиному степени $< r$ (дальше — простая техника).

12. Поперечники конечномерных множеств II.

Работа Кашина [3]: оценка $d_n(B^N_2, \ell^N_\infty) \leqslant cn^{-1/2}(\log \frac{2N}{n})^{3/2}$, как следствие $d_n(B^{2n}_2, \ell^{2n}_\infty) \leqslant c/\sqrt{n}$, откуда элементарными средствами выводится порядок для всех p, q; выпишем для $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$:

$$d_n(B^{2n}_p, \ell^{2n}_q) \asymp \begin{cases} 1, & q \leqslant 2, \\ n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & p \geqslant 2, \\ n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}, & p \leqslant 2 \leqslant q. \end{cases}$$

Применяя дискретизацию, получаем оценки всех поперечников, кроме W^1_1 в L_q, $2 < q < \infty$:

$$d_n(W^r_p, L_q) \asymp \begin{cases} n^{-r}, & p \geqslant q \text{ или } 2 < p < q, \\ n^{-r+1/p-1/q}, & p < q \leqslant 2, \\ n^{-r+1/p-1/2}, & p \leqslant 2 < q,\ rp > 1. \end{cases}$$

Оценку Кашина с правильным логарифмом проще всего получить с помощью RIP (см. rip-to-width.pdf).

13. Работы Глускина: порядок конечномерных поперечники при $q < \infty$ и $p \geqslant 2$.

Положим $\theta_1 = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})/(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$, $\theta_2 = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})/(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$.

$$\Phi(n, N, p, q) = \begin{cases} \min(1, N^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}})^{\theta_1}, & 2 \leqslant p < q \leqslant \infty, \\ \max(N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \min(1, N^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}})\sqrt{1-\frac{n}{N}}), & 1 \leqslant p < 2 \leqslant q \leqslant \infty, \\ \max(N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, \sqrt{1-\frac{n}{N}}^{\theta_2}), & 1 \leqslant p < q \leqslant 2. \end{cases}$$

При $1 \leqslant p < q < \infty$ имеем

$$c_1(p,q) \leqslant d_n(B_p^N, \ell_q^N)/\Phi(n,N,p,q) \leqslant c_2(p,q).$$

При $q = \infty$ правое неравенство верно со степенью логарифма.

Глускин-1981-ЛГУ [10]: вывел оценки сверху при всех $1 \leqslant p < q < \infty$ с логарифмом, доказал оценки снизу без логарифма. Оценки сверху используют: Элементарные оценки и Теорему М: для любого $q > 2$ найдется подпространство размерности $> cN^{2/q}$, на котором все нормы $\{N^{-1/r}\|x\|_r\}_{1\leqslant r\leqslant q}$ эквивалентны. Оценки снизу: следуют из неравенства

$$d_n(V_k^N, \ell_q^N) \geqslant \frac{1}{2}k^{1/q}, \quad n \leqslant c_q N^{2/q}k^{1-2/q},$$

где

$$V_k^N = \mathrm{conv}\{x \in \mathbb{R}^N \colon x_i \in \{0,1,-1\},\ \sum_{i=1}^N |x_i| = k\}.$$

Доказательство неравенства — обобщение рассуждения с октаэдром в ℓ_2: усреднения по образующим V (точнее, по группе изометрий ℓ_∞^N); развитие Исмагилова'68. Позже ([14]) Глускин установил такую же оценку для $q \leqslant 2$, $n < N/2$ (TODO), итого:

$$d_n(V_k^N, \ell_q^N) \begin{cases} \asymp k^{1/q}, & 1 \leqslant q \leqslant 2,\ n < N/2, \\ \gg \min(k^{1/q}, N^{1/q}\sqrt{k/n}), & 2 < q \leqslant \infty,\ n < N/2. \end{cases}$$

Глускин-1983 [11]: одна из основных работ, убрал логарифм при $q < \infty$. Доказательство сводится к случаю $d_n(B_2^N, \ell_q^N) = d^n(B_{q'}^N, \ell_2^N)$, $2 < q < \infty$, и проводится в три этапа.

- Рассматриваются множества вида

  $$V = \bigcup_{z\in\Lambda}(z + \frac{1}{4}\|z\|_2 W) \cup B_2^N,$$

  где $|\Lambda| \leqslant c_1\exp(c_2 n)$, $W \subset K \subset B_2^N$ и K — многогранник из $O(\exp(c_3 n))$ вершин. Доказывается, что $d^n(V, \ell_2^N) \leqslant 1$; для этого берется оператор $T = P_n U$, P_n — стандартный проектор на $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^N$, U — случайное вращение, оценивается снизу $\|Tz\|_2$, $z \in \Lambda$, и сверху $\|Tw\|_2$, $w \in W$, и показывается, что $\operatorname{Ker} T \cap V \subset B_2^N$.

- Шар $c_q\mu B_{q'}^N$ погружается в V, где $W = c_q'(B_2^N \cap \mu B_{q'}^N)$, Λ — ε-сеть во множестве s-разреженных векторов в $s^{1/2}B_1^N$ (параметры μ, ε, s подбираются по q, n, N).

- Пересечение $c(B_2^N \cap \mu B_{q'}^N)$ погружается в многогранник.

Глускин–Гарнаев-1984 [12]: правильная степень логарифма в $d_n(B_p^N, \ell_\infty^N)$ при $2 \leqslant p < \infty$:

$$\frac{1}{4}\min\left\{1, \left(c_1\frac{\log(2N/n)}{n}\right)^{1/p}\right\} \leqslant d_n(B_p^N, \ell_\infty^N) \leqslant \min\left\{1, \left(c_2\frac{\log(2N/n)}{n}\right)^{1/p}\right\}.$$

Оценка снизу проводится через энтропию: для выпуклого тела V в нормированном пространстве X с шаром B_X, и $\varepsilon, t > 0$ имеем

$$N_\varepsilon(V \cap tB_X, X) \leqslant \left(1 + 2\frac{t + d_n(V, X)}{\varepsilon - d_n(V, X)}\right)^n.$$

(Построение ε-сети сводится к конечномерному подпространству, там работают стандартные соображения объёма.) Для оценки ε-сети снизу берется различимое множество V_k^N.

Оценка сверху сводится к случаю $p = 2$. Применяется теорема из работы 83 года. Полагаем: $s = \lfloor cn/\log(2N/n)\rfloor$, $V = \frac{1}{64}\sqrt{s}B_1^N$, $W = \frac{1}{4}(B_2^N \cap \sqrt{s}B_1^N)$, Λ — $\frac{1}{64}$-сеть во множестве s-разреженных векторов в $\sqrt{s}B_1^N$. Условие на W выводится из включений

$$B_2^N \cap \sqrt{s}B_1^N \subset 2\,\mathrm{conv}\bigcup_{|A|=s} B_2^A \subset 4\,\mathrm{conv}\bigcup_{|A|=s} \mathcal{E}_A,$$

где $\mathcal{E}_A$ — $\frac{1}{2}$-сеть в B_2^A.

14. Проблемы

1.**Глускин, Мат.сборник, 1983.**

Линейный поперечник $d_n'(V) = \inf_T \sup_{x\in V} \|x - Tx\|$, в качестве T — все операторы ранга $\leqslant n$. Пусть X, X^* отождествлены с помощью стандартного скалярного произведения в $\mathbb{R}^N$. Верно ли, что $d_n'(BX, X^*) \leqslant cd_n(BX, X^*)$ с некоторой абсолютной c? Комментарий: в случае B_p^N в l_q–метрике порядок для d_n' вычислен всюду кроме случая $p = 1, q = \infty$ и логарифмов не содержит.

Ещё, там же: про связь M_W и многогранник F.

2. $d_n(W_1^1, L_q)$, $q > 2$.

Список литературы

[1] Б.С. Кашин, “О колмогоровских поперечниках октаэдров”, *ДАН*, 214:5 (1974).

[2] Б.С. Кашин, “О поперечниках октаэдров”, *УМН*, **30**:4 (1975), 251–252.

[3] Б.С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР*, *41*:2 (1977), 334–351.

[4] Б.С. Кашин, “О некоторых свойствах матриц ограниченных операторов из пространства ℓ_2^n в ℓ_2^m”, *Изв. АН АССР*, **XV**:5 (1980).

[5] Ю.И. Маковоз, “Об одном приёме оценки снизу поперечников множеств в банаховых пространствам”, *Мат. Сб.*, **87**:1 (1972), 136–142.

[6] А.А. Васильева, “Аппроксимативные свойства весовых классов Соболева”, диссертация канд. физ.-мат. наук.

[7] С.Б. Стечкин, “О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами”, *Успехи матем. наук*, **9**:1 (1954), 133–134.

[8] В.М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений.*

[9] Р.С. Исмагилов, “Об n-мерных поперечниках компактов в гильбертовом пространстве”, *Функ. ан. и прил.*, **2**:2 (1968), 32–39.

[10] Е.Д. Глускин, “О некоторых конечномерных задачах теории поперечников”, *Вестник ЛГУ*, **3**:13 (1983), 5–10.

[11] Е.Д. Глускин, “Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств”, *Матем. сб.*, **120**(**162**):2 (1983), 180–189.

[12] А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин, “О поперечниках евклидова шара”, *ДАН СССР*, **277**:5 (1984), 1048–1052.

[13] Е.Д. Глускин, “Октаэдр плохо приближается случайными подпространствами”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:1 (1986), 14–20.

[14] Е.Д. Глускин, “Пересечения куба с октаэдром плохо аппроксимируются подпространствами малой размерности”, *Приближение функций специальными классами операторов*, Вологда: Вологодский гос. пед. ин-т (1987), 35–41.

[15] Р.С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29**:3(177) (1974), 161–178.

[16] М.И. Стесин, “Александровские поперечники конечномерных множеств и классов гладких функций”, ДАН СССР, 220:6 (1975), 1278–1281.

[17] В.Е. Майоров, “Дискретизация задачи о поперечниках”, *УМН*, **30**:6(186) (1975), 179–180.

[18] А.Б. Ходулёв, “Некоторые точные значения колмогоровских поперечников в конечномерных пространствах”, *Препринт ИМП им. М.В. Келдыша АН СССР*, **185** (1988).

[19] А.Б. Ходулёв, “К вычислению точных значений колмогоровских поперечников конечномерных октаэдров”, *Матем. заметки*, **45**:5 (1989), 87–92.

[20] В.И. Левенштейн, “Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения”, *Пробл. кибернетики*, **40** (1983), 43–110.

[21] N. Alon, “Problems and results in extremal combinatorics – I”, *Discr. Math.*, **273** (2003), 31–53.

[22] A. Ben-Aroya, A. Ta-Shma, “Constructing small-bias sets from algebraic-geometric codes”, Proceedings of the IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS 2009), IEEE Computer Soc. (2009), 191–197.

[23] J. Bourgain, S. Dilworth, K. Ford, S. Konyagin, D. Kutzarova, “Explicit constructions of RIP matrices and related problems”, *Duke Math. J.*, **159**:1 (2011), 145–185.

[24] Ronald A. DeVore, “Deterministic constructions of compressed sensing matrices”, *J. of Complexity*, **23** (2007), 918–925.

[25] K. Hollig, *Math. Ann.*, **242**:3 (1979), 273–281.